ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

1. (a) Si c et d sont deux réels et k un entier naturel non nul, montrer que
$$\int_0^1 (ct^2 + dt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2\pi^2}.$$
   (b) En déduire qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tels que, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$\int_0^1 (at^2 + bt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k^2}.$$
   (c) Calculer alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 (at^2 + bt)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\Big)\,dt$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in]0, \pi[$, $\quad 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{\sin\big((2n+1)\theta\big)}{\sin\theta}$.

3. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
   (a) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt = \frac{f(0) - f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,dt$.
   (b) En déduire que la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

4. On considère la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par
$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2 - 2t)}{4\sin(\frac{\pi}{2}t)} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = -\pi.$$
   (a) Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1]$ et que f' possède une limite finie à droite en 0.
   (c) Montrer alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
   (d) Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\quad (at^2 + bt)\Big(\frac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t\Big) = f(t)\sin\big((2n+1)\frac{\pi t}{2}\big)$.
   (e) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ ainsi que la valeur de sa somme.

PROBLÈME

Dans ce problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle

$$y'' + y = f. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

Première partie

1. Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

2. On note Σ_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin(\lambda x), \qquad (E_\lambda)$$

   où λ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique réel a, que l'on calculera, tel que la fonction

$$S_\lambda : \ x \longmapsto a\sin(\lambda x)$$

   soit un élément de Σ_λ.

   (b) Montrer alors que $\Sigma_\lambda = \{x \longmapsto \alpha\cos x + \beta \sin x + S_\lambda(x) \quad ; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

   (c) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont toutes 2π-périodiques.

   (d) Montrer que la fonction S_λ est périodique et préciser ses périodes puis en déduire que l'équation différentielle $(E_{\sqrt{2}})$ n'a pas de solutions 2π-périodiques.

Deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \int_0^x f(t)\sin t\,dt.$$

1. Montrer que φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $\quad \varphi(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$.

   (b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Montrer que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

3. Soit g une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$; montrer que la fonction $(g-\varphi)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et en déduire qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel x,

$$g(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt.$$

4. **Application :** Soit $h : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h'' + h \geqslant 0$.

   (a) Vérifier que h est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$ où $f_1 = h'' + h$.

   (b) En déduire une expression de h puis montrer que, pour tout réel x, $\quad h(x+\pi) + h(x) \geqslant 0$.

5. **Cas où f est 2π-périodique**

   On revient au cas général et on suppose que f est en plus 2π-périodique.

   (a) Si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.

      i. Montrer alors que la fonction φ est 2π-périodique.

      ii. Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt = 0$ et en déduire que
      $$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0.$$

   (b) Réciproquement, montrer que si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont 2π-périodiques.

   (c) Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

Troisième partie

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et possédant une limite finie ℓ en $+\infty$.

1. (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout réel $x \geqslant A$, $\quad |f(x)| \leqslant 1 + |\ell|$.

   (b) Montrer alors que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que la fonction f' est positive et montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est convergente ; préciser la valeur de cette intégrale.

   (b) En déduire que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\sin t\,dt$ sont convergentes.

3. (a) Montrer que, pour tout réel x,
   $$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,dt.$$

   (b) En déduire que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est de la forme
   $$y_{\alpha,\beta} : x \longmapsto f(x) + \Big(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t\,dt\Big)\cos x + \Big(\beta - \int_0^x f'(t)\sin t\,dt\Big)\sin x,$$
   où α et β sont des réels.

   (c) Montrer alors que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont bornées sur $[0, +\infty[$.

4. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; on suppose que la solution $y_{\alpha,\beta}$ de $(\mathcal{E}_f)$ admet une limite finie en $+\infty$.

   (a) En étudiant la suite $\big(y_{\alpha,\beta}(n\pi)\big)_{n\geqslant 0}$, montrer que $\alpha = f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$.

   (b) Trouver de même la valeur de β.

5. Montrer alors que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution, notée Y_f, ayant une limite finie en $+\infty$ à préciser, et que Y_f est définie par
   $$Y_f(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t)\cos(x-t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE